



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

مثلثات

۴

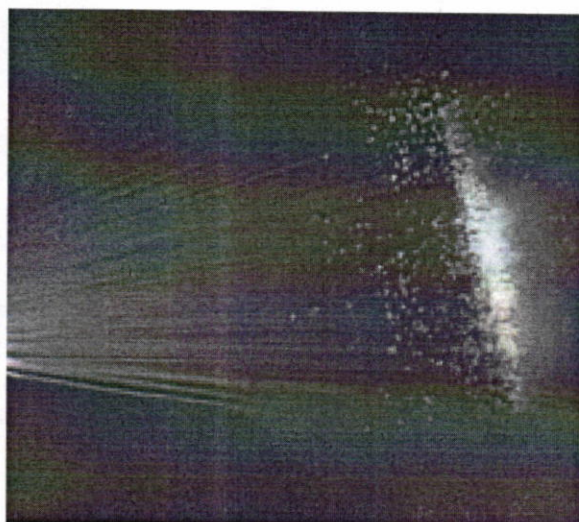
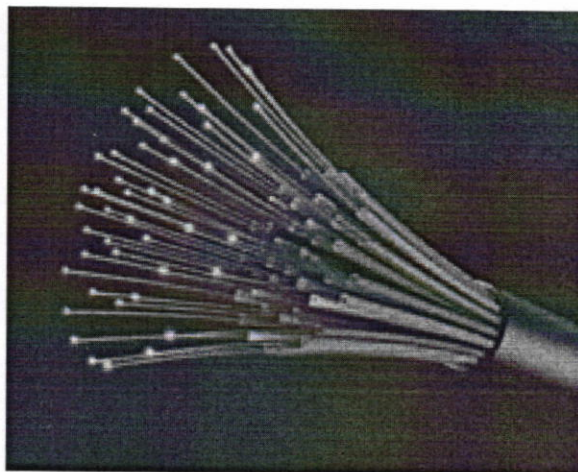
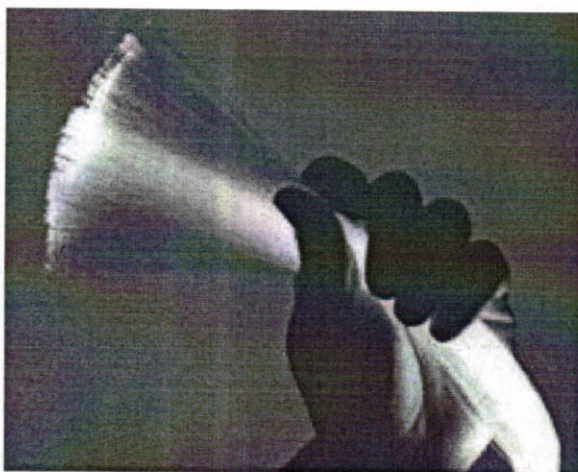
فصل

۱ رادیان

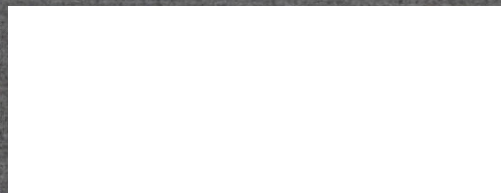
۲ نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

۳ توابع مثلثاتی

۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا



فیبرهای نوری برای انتقال داده ها با سرعت بسیار بالا به ویژه در خطوط اینترنت استفاده می شوند. برای طراحی این فیبرها نیاز است تا امواج نوری به کمک امواج سینوسی شبیه سازی شوند. معمولاً چندین رشته از فیبرهای نوری در یک غلاف پلاستیکی محافظت می شود.



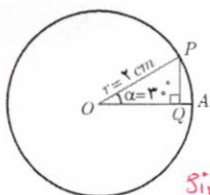
رادیان

۱

درس

تاکنون زاویه‌ها را برحسب «درجه» اندازه‌گیری می‌کردیم. استفاده از واحد «درجه» برای اندازه‌گیری زوایا در هندسه بسیار متداول است. اما در برخی محاسبات فنی بهتر است از واحدهای دیگری استفاده شود. در ادامه با یک واحد دیگر اندازه‌گیری زوایا، به نام رادیان، آشنا می‌شویم.

فعالیت



۱ دایره مقابل به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر داده شده است.

اندازه ضلع PQ در مثلث OPQ را با استفاده از نسبت‌های

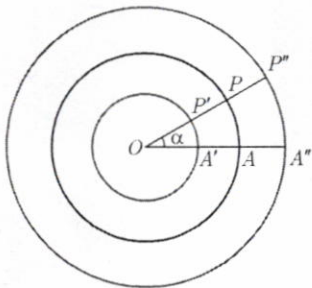
مثلثاتی سال گذشته به دست آورید.

$$\sin \alpha = \frac{PQ}{OP} \rightarrow \sin 3^\circ = \frac{PQ}{2} \rightarrow PQ = 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

۲ با توجه به اینکه کمان 3° برابر $\frac{1}{12}$ کل محیط دایره است (چرا؟) می‌توان طول کمان روبه‌رو به زاویه α (یعنی $\widehat{PA}$) را به صورت زیر به دست آورد.

$$\rightarrow \frac{1}{12} \times 360 = 30$$

$$\widehat{PA} = \frac{1}{12} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 2 = \frac{4}{12}\pi = \frac{\pi}{3} \text{ cm}$$



اکنون به مرکز O دایره‌های دیگری به شعاع‌های ۱ و ۳

سانتی‌متر رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو).

الف) مطابق فرمول بالا طول کمان‌های $P'A'$ و $P''A''$ را

که روبه‌رو به زاویه $\alpha = 3^\circ$ هستند به دست آورید.

$$\widehat{P'A'} = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 1 = \frac{\pi}{6} \text{ cm}$$

$$\widehat{P''A''} = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 3 = \frac{\pi}{2} \text{ cm}$$

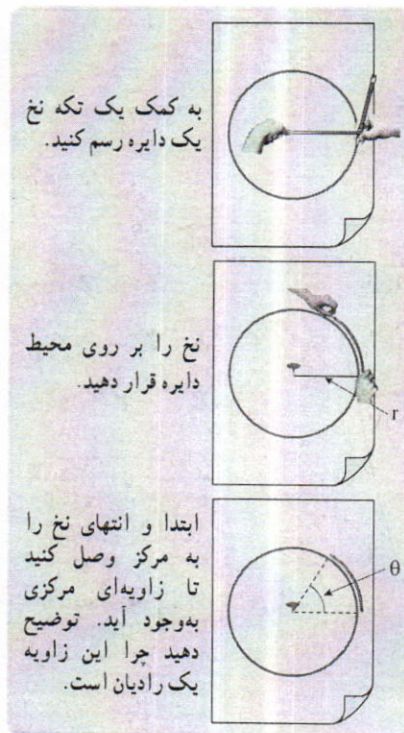
ب) در هر دایره نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه α به شعاع آن دایره را محاسبه کنید. این نسبت‌ها با هم

چه رابطه‌ای دارند؟

$$\frac{\widehat{PA}}{OP} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\widehat{P'A'}}{OP'} = \frac{\frac{\pi}{6}}{1} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\widehat{P''A''}}{OP''} = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

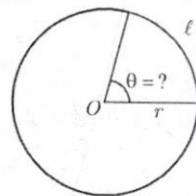


ب) اگر در شکل صفحه قبل دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O در نظر بگیریم، آیا نسبت فوق در آن دایره تغییری می‌کند؟ چرا؟ با تکمیل رابطه زیر، به این سؤال پاسخ دهید.

$$\frac{\frac{1}{12} \times 2\pi \times r}{r} = \dots \frac{\pi}{6} \dots$$

در سؤال قبل دیدیم که نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه 30° به شعاع، در همه دایره‌ها برابر مقدار ثابت $\frac{\pi}{6}$ است. اکنون در سؤال زیر به این می‌پردازیم که این نسبت چه زمانی برابر ۱ است.

۲ در یک دایره به شعاع r ، مانند شکل زیر، طول کمان روبه‌رو به زاویه θ (کمان ℓ) برابر طول شعاع دایره است. نسبت طول کمان به شعاع چقدر است؟ اندازه زاویه θ تقریباً چند درجه است؟ (از مقاله استفاده کنید) $\frac{\ell}{r} = 1 \text{ rad}$

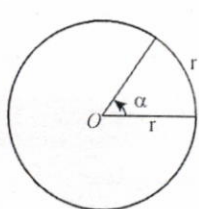


$$1 \text{ rad} = 57.3^\circ$$

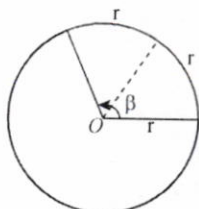
همان‌طور که در فعالیت قبل مشاهده کردید نسبت طول کمان روبه‌رو به یک زاویه به شعاع دایره همواره مقداری ثابت است. از این مقدار ثابت برای بیان اندازه زاویه می‌توان استفاده کرد؛ مثلاً در سؤال ۳ فعالیت قبل، این نسبت برای زاویه θ برابر یک است. در این صورت می‌گویند اندازه زاویه θ برابر ۱ رادیان است.

یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع دایره است. معمولاً از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می‌شود.

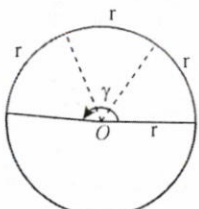
در زیر زاویه‌های ۱ تا ۶ رادیان در دایره‌ای به شعاع دلخواه r رسم شده‌اند. در هر شکل به نسبت طول کمان روبه‌رو به هر زاویه به شعاع دقت کنید.



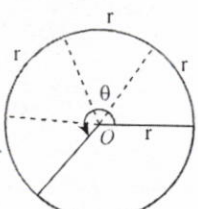
$$\alpha = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$$



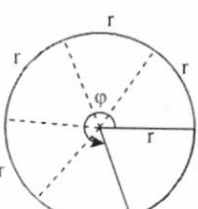
$$\beta = \frac{2r}{r} = 2 \text{ rad}$$



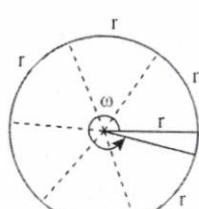
$$\gamma = \frac{3r}{r} = 3 \text{ rad}$$



$$\theta = \frac{4r}{r} = 4 \text{ rad}$$



$$\phi = \frac{5r}{r} = 5 \text{ rad}$$



$$\omega = \frac{6r}{r} = 6 \text{ rad}$$

❖ مثال : اندازه یک زاویه نیم صفحه (180°) و نیز یک زاویه قائمه (90°) برحسب رادیان چقدر است؟

❖ حل : می دانیم که طول کمان روبه‌رو به زاویه نیم صفحه، نصف محیط دایره است. بنابراین داریم :

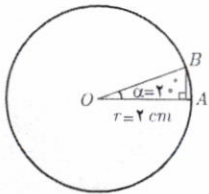
$$\frac{2\pi r}{2} = \frac{\pi r}{r} = \pi \text{ rad}$$

پس یک زاویه 180° برابر π رادیان می‌باشد. به‌طور مشابه طول کمان روبه‌رو به یک زاویه قائمه، ربع محیط دایره است. پس :

$$\frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

همواره بین اندازه یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان l روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه زیر برقرار است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$



❖ مثال : در شکل مقابل اندازه زاویه α را برحسب رادیان به‌دست آورید، سپس طول $\widehat{AB}$ را پیدا کنید.

❖ حل : از مثال قبل می‌دانیم که هر زاویه 180° برابر π رادیان است. بنابراین داریم :

$$\frac{2^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{2^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

پس زاویه α برابر $\frac{\pi}{9}$ رادیان است. اکنون برای به‌دست آوردن طول $\widehat{AB}$ داریم :

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{9} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi}{9} \text{ cm}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

اگر D اندازه زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازه آن برحسب رادیان باشد، آنگاه :

❖ مثال : در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های 10 cm و

$2/5 \text{ cm}$ را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{4}$

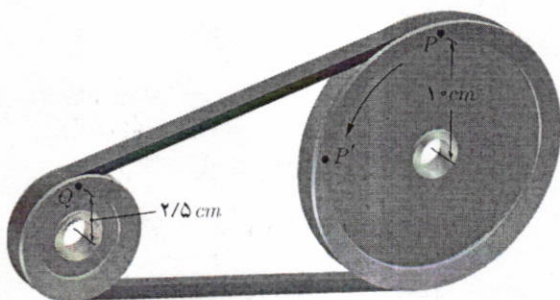
رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقره کوچک‌تر

چند رادیان می‌چرخد. ($\pi \text{ rad} \approx 3/14 \text{ rad}$)

❖ حل : ابتدا مسافتی را که نقطه P بر روی محیط قرقره بزرگ‌تر طی

می‌کند به‌دست می‌آوریم.

$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{r} \Rightarrow \widehat{PP'} = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{4} = 5\pi \text{ cm} \approx 15/7 \text{ cm}$$



چون هر دو قمره با یک تسمه به هم متصل هستند پس قمره کوچک تر نیز $5\pi \text{ cm}$ حرکت می کند. برای این قمره داریم:

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{5\pi}{2/5} = \frac{5\pi}{\frac{2}{5}} = 2\pi \text{ rad}$$

بنابراین وقتی قمره بزرگ تر ربع دور می چرخد، قمره کوچک تر یک دور کامل می چرخد و نقطه Q به مکان خود بازمی گردد.

کارد کلاس

۱ در جدول روبه‌رو جاهای خالی

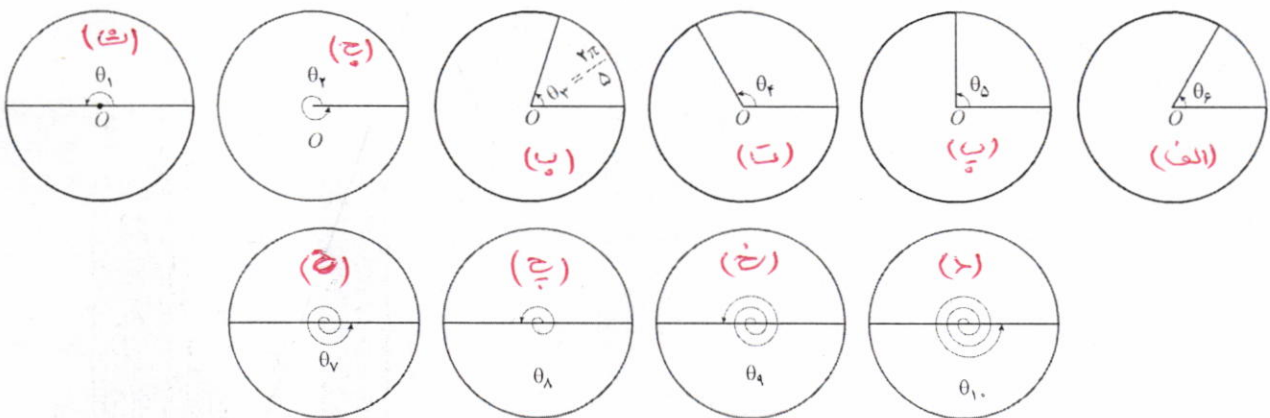
را پر کنید.

زاویه بر حسب درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	420°	480°
زاویه بر حسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$

۲ در زیر، اندازه برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زاویای داده شده در دایره‌های مثلثاتی

زیر نظیر کنید.

الف) $\frac{2\pi}{6}$ ب) $\frac{2\pi}{5}$ پ) $\frac{2\pi}{4}$ ت) $\frac{2\pi}{3}$ ث) $\frac{2\pi}{2}$ ج) 2π ج) 3π ح) 4π خ) 5π د) 6π



۲ در جدول روبه‌رو، که سال گذشته

آن را بر حسب درجه کامل کرده‌اید،

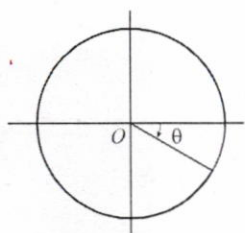
مقدار نسبت‌های مثلثاتی خواسته شده را

در جاهای خالی بنویسید.

نسبت \ θ (رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2π
$\sin\theta$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	$-\frac{1}{2}$	۰
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۱
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	۰	تعریف نشده

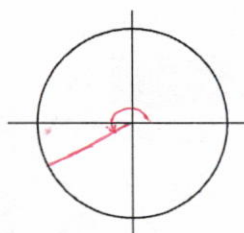
مقادیر نسبت‌های مثلثاتی در این جدول را برای زاویه‌های 0 تا 2π به دست آورده‌اید. اینها را بنویسید.

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



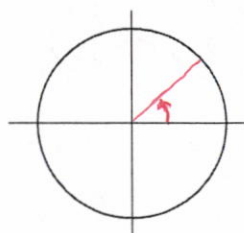
$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



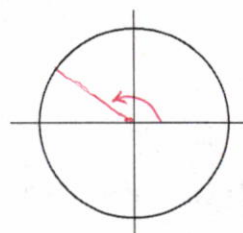
$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} =$$

انتهای کمان در ربع سوم است.



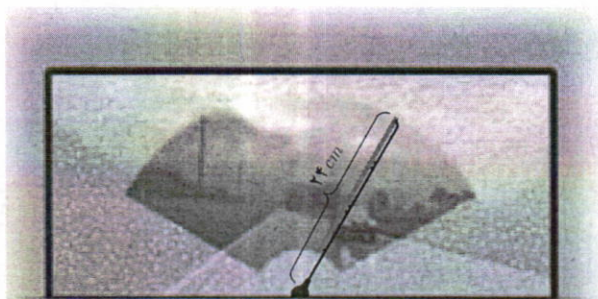
$$\beta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} =$$

انتهای کمان در ربع اول است.



$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} =$$

انتهای کمان در ربع دوم است.



۲ طول برف پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است.

فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه 120° طی می‌کند. ($\pi \approx 3.14$)

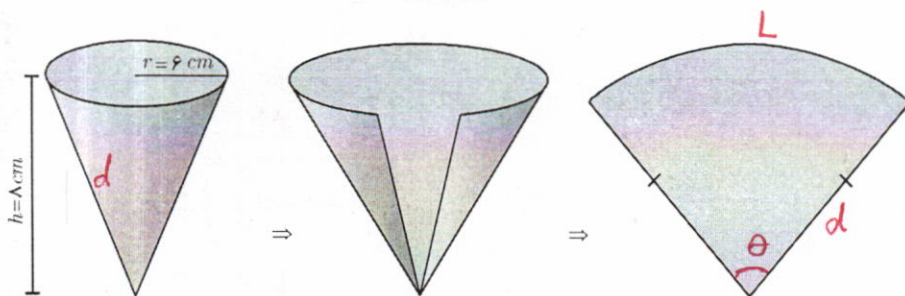
الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

$$\text{الف) } \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{ب) } \frac{2\pi}{3} = \frac{L}{24} \rightarrow L = \frac{2\pi \times 24}{3} = 16\pi \approx 50.24 \text{ cm}$$

۳ شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6 \text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 8 \text{ cm}$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



۱- به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع گفته می‌شود.

$$d^2 = r^2 + h^2$$

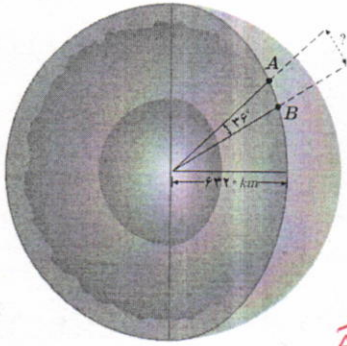
$$\rightarrow d^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\rightarrow d = 10$$

$$\text{طول کمان} = \text{محیط قاعده} = 2\pi r = 12\pi$$

مفروض

$$\theta = \frac{L}{d} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6}{5}\pi \text{ Rad}$$



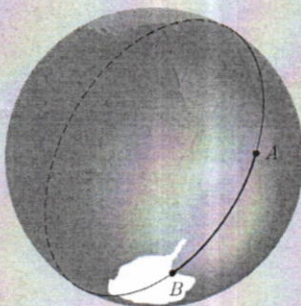
۲ فاصله دو نقطه A و B از کره زمین، که بر روی یک نصف النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{32}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{\omega} \text{ rad}$$

اندازه زاویه رادیان

$$\theta = \frac{\widehat{AB}}{r} \rightarrow \frac{\pi}{\omega} = \frac{\widehat{AB}}{6370} \rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi}{\omega} \times 6370 = 3948.96 \approx 3949 \text{ km}$$

خواندنی

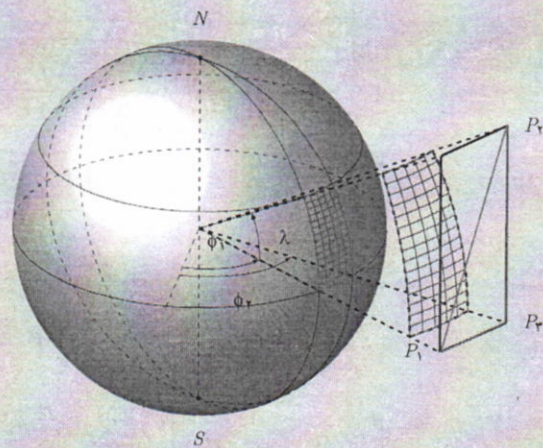


فاصله ژئودزیک دو نقطه از کره زمین



نصف النهارها دایره‌های عظیمه‌ای روی کره زمین تشکیل می‌دهند.

به فاصله بین دو نقطه داده شده در تمرین ۴ در اصطلاح فنی «فاصله ژئودزیک» دو نقطه گفته می‌شود. برای محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین لزومی ندارد که آن دو نقطه بر روی یک نصف النهار باشند. در عمل با استفاده از سیستم مکان‌یابی جهانی (GPS) موقعیت جغرافیایی آن دو نقطه را برحسب طول و عرض جغرافیایی آنها به دست می‌آورند و سپس با استفاده از محاسبات پیچیده‌ای فاصله ژئودزیک بین آن دو نقطه را محاسبه می‌کنند. در تمام این محاسبات که در آن از مثلثات کروی استفاده می‌شود باید زوایا برحسب رادیان در نظر گرفته شوند، در غیر این صورت محاسبات به مراتب پیچیده‌تر می‌گردد. فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین کوتاه‌ترین فاصله‌ای است که بین آن دو نقطه می‌توان پیدا کرد. این فاصله، طول کمانی از بزرگ‌ترین دایره‌ای است که از آن دو نقطه می‌گذرد و به آن «دایره عظیمه» می‌گویند. محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز هدایت ماهواره‌ها بسیار اهمیت دارد. بررسی کنید که چرا برای دو نقطه از کره زمین که روی یک نصف النهار قرار دارند، دایره عظیمه همان نصف النهار گذرنده از آن دو نقطه می‌باشد.



مثلثات کروی در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز محاسبه سطوح و خم‌ها بسیار کاربرد دارد.

نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

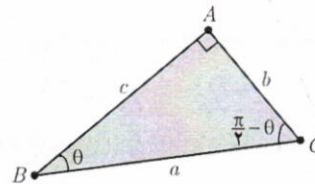
در سال گذشته به مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای برخی از زوایای تند (مانند 30° ، 45° ، 60°) و نیز زوایای مرزی (0° ، 90° ، 180° ، 270° ، 360°) پرداختیم. همچنین علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایره مثلثاتی یاد گرفتیم. اکنون به مقدار این نسبت‌ها برای برخی دیگر از زوایا و رابطه بین آنها می‌پردازیم.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

می‌دانید که به هر دو زاویه‌ای که مجموع اندازه آنها 90° باشد زاویه‌های متمم می‌گویند. نسبت‌های مثلثاتی چنین زاویه‌هایی با هم ارتباط دارند. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا این روابط را پیدا کنید.

فعالیت

یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

$$\sin \theta = \frac{b}{c}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{a}{b}$$

$$\cot \theta = \frac{a}{b}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{b}{a}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

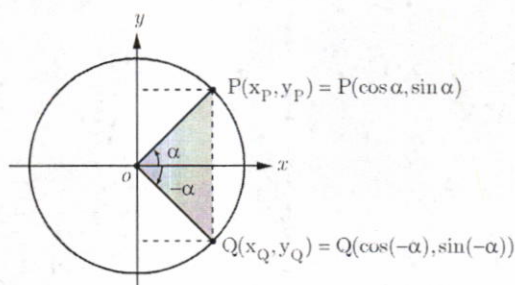
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$$

در فعالیت قبل زاویه‌های مورد بحث تند بودند. روابط به‌دست آمده در آنجا در حالت کلی نیز برقرار است. به‌طور کلی برای دو زاویه متمم θ و $\frac{\pi}{2} - \theta$ همواره روابط روبه‌رو برقرار است.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. مختصات نقطه P برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور x ها نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(x_P, -y_P)$ می‌باشد.

الف) باتوجه به رابطه بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$y_Q = -y_P \Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط به‌دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

دو زاویه α و $-\alpha$ قرینه یکدیگرند. برای دو زاویه قرینه روابط مثلثاتی زیر برقرار است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

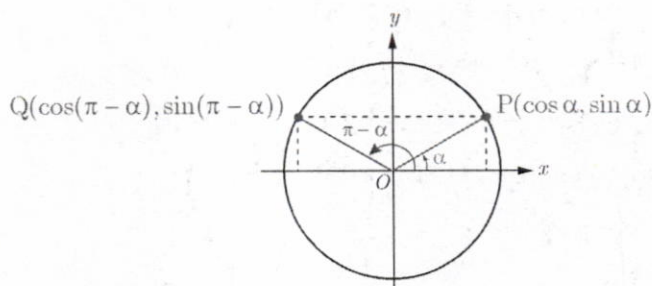
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

دو زاویه را مکمل گوئیم اگر مجموع آنها 180° باشد. در فعالیت بعد روابط بین مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای چنین زاویه‌هایی را به‌دست خواهیم آورد.



در دایره مثلثاتی زیر نقطه $P(x_P, y_P)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. با توجه به دستگاه مختصات واضح است که نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, -y_P)$ قرینه نقطه P نسبت به محور y ها است.

الف) با توجه به مختصات نقاط P و Q روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -x_P \Rightarrow \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$y_Q = y_P \Rightarrow \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

ب) با توجه به روابط قسمت الف، تساوی‌های زیر را تکمیل کنید.

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

از فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که بین هر دو زاویه مکمل α و $\pi - \alpha$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

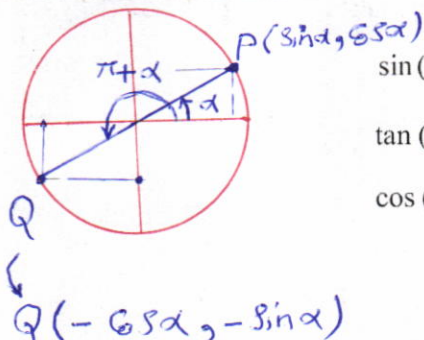
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

زوایای α و $\pi + \alpha$ را در یک دایره مثلثاتی رسم کنید و نقاط انتهایی کمان‌های روبه‌رو به این دو زاویه را به ترتیب $P(x_P, y_P)$ و $Q(x_Q, y_Q)$ بنامید. از دستگاه مختصات واضح است که نقطه Q قرینه نقطه P نسبت به مبدأ مختصات است و از این رو $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, -y_P)$. اکنون با استدلالی مشابه به فعالیت بالا نشان دهید که روابط روبه‌رو برقرار است.
 مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.



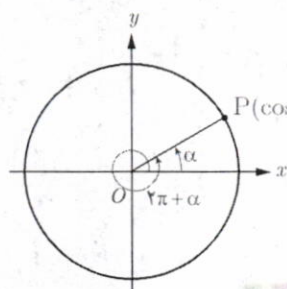
$$\sin\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(225^\circ) = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان

زاویه‌هایی مانند α و $2\pi + \alpha$ در شکل زیر که انتهای کمان‌های آنها برهم منطبق می‌شود را زوایای هم‌انتهای گویند. از آنجا که نقطه P انتهای هر دو کمان می‌باشد لذا نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه باهم برابرند.



$$P(\cos \alpha, \sin \alpha) = P(\cos(2\pi + \alpha), \sin(2\pi + \alpha))$$

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

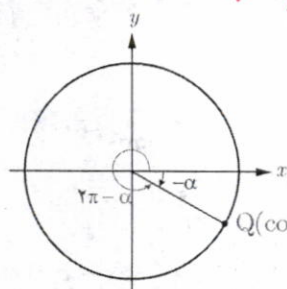
$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

این حالت برای بیش از یک دوران کامل، یعنی زوایای به صورت $2k\pi + \alpha$ ، نیز برقرار است. ($k \in \mathbb{Z}$)

هر 2π یک دور کامل است از محور مثبت.



$$Q(\cos(2\pi - \alpha), \sin(2\pi - \alpha)) = Q(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$$

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $2k\pi - \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) نیز هم‌انتهای هستند (چرا؟)، با استدلالی مشابه بالا و با استفاده از نتیجه فعالیت صفحه قبل نشان دهید که نسبت‌های مثلثاتی زوایای $2k\pi - \alpha$ به صورت زیر برقرارند.

❖ مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

الف) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

ب) $\sin(4^\circ 5') = \sin(36^\circ + 45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(210^\circ) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

ب) $\tan(-\frac{7\pi}{4}) = \tan(-2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

پ) $\cot(135^\circ) = \cot(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$

ت) $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

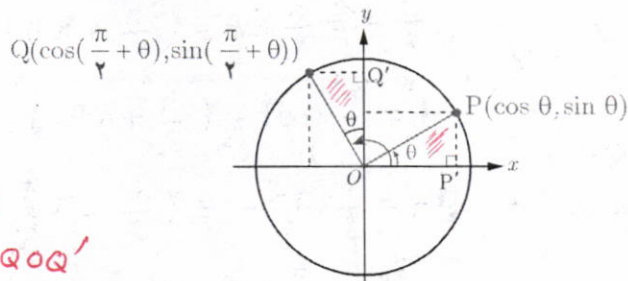
نسبت زاویه	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = 2k\pi - \theta$	$\alpha = 2k\pi + \theta$
انتهای کمان	ربع دوم	سوم	چهارم	اول
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها				
	نسبت + -	نسبت + -	نسبت + -	نسبت + -
	$\sin \alpha$ ✓	$\sin \alpha$ ✓	$\sin \alpha$ ✓	$\sin \alpha$ ✓
	$\cos \alpha$ ✓	$\cos \alpha$ ✓	$\cos \alpha$ ✓	$\cos \alpha$ ✓
	$\tan \alpha$ ✓	$\tan \alpha$ ✓	$\tan \alpha$ ✓	$\tan \alpha$ ✓
$\sin \alpha$	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	$\sin(2k\pi - \theta) = -\sin \theta$	$\sin(2k\pi + \theta) = \sin \theta$
$\cos \alpha$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$	$\cos(2k\pi - \theta) = \cos \theta$	$\cos(2k\pi + \theta) = \cos \theta$
$\tan \alpha$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$	$\tan(2k\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\tan(2k\pi + \theta) = \tan \theta$
$\cot \alpha$	$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\cot(\pi + \theta) = \cot \theta$	$\cot(2k\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\cot(2k\pi + \theta) = \cot \theta$

۳ برای زوایای قرینه ($\alpha = -\theta$) از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟

$$\alpha = 2k\pi - \theta \xrightarrow{k=0} \alpha = -\theta$$

ستون سوم

در دایره مثلثاتی روبه‌رو زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ رسم شده‌اند.



$$\begin{cases} OP = OQ \\ \angle POP' = \angle QOQ' \end{cases}$$

حالت
برای دو زاویه
همیشه
صحت دارد.

الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $\triangle OPP'$ و $\triangle OQQ'$ هم‌نهشت هستند.
ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -y_P \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$y_Q = \cos \theta \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

به‌طور کلی برای دو زاویه θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$$

۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(30^\circ) =$

ب) $\cot(75^\circ) =$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{6}) =$

ت) $\cos(-\frac{23\pi}{4}) =$

ث) $\sin(\frac{5\pi}{4}) =$

ج) $\tan(-84^\circ) =$

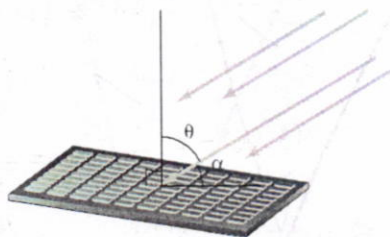
چ) $\tan(-15^\circ) =$

ح) $\cos(\frac{9\pi}{4}) =$

خ) $\tan(\frac{1}{3}\pi) =$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه های $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا بر حسب رادیان است).

الف) $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$

ب) $\sin(\frac{\pi}{4} - \theta) + \cos \theta = 1$

ج) $\cos(7) = \cos(-7)$

د) $\tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

حل کاردر کلاس صفحه ی ۹ (حسابان ۱)

: ۱

$$\text{الف)} \sin(300^\circ) = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ب)} \cot(75^\circ) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot(4\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$$

$$\text{پ)} \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ت)} \cos(-\frac{23\pi}{4}) = \cos(\frac{23\pi}{4}) = \cos(6\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ث)} \sin(\frac{5\pi}{4}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ج)} \tan(-84^\circ) = -\tan(84^\circ) = -\tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

$$\text{چ)} \tan(-15^\circ) = -\tan(15^\circ) = -\tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ح)} \cos(\frac{9\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{خ)} \tan(\frac{10\pi}{3}) = \tan(3\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

: ۲

$$\text{الف)} I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = k \cos \alpha = k \sin \theta$$

$$\text{ب)} I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = k \sin \theta \rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow I = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow I = \frac{k}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow I = \frac{k\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{پ)} I = k \xrightarrow{I = k \sin \theta} \sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

د) درست

ج) درست

ب) نادرست

۳: الف) درست

توابع مثلثاتی

در درس‌های قبل مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای برخی زوایا به دست آوردیم. اکنون این سؤال به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان این نسبت‌ها را برای یک عدد حقیقی تعریف کرد؟ مثلاً عبارات $\sin 3$ یا $\cos 3$ چه مفهومی دارند؟ فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا پاسخ این سؤالات را بیابید.

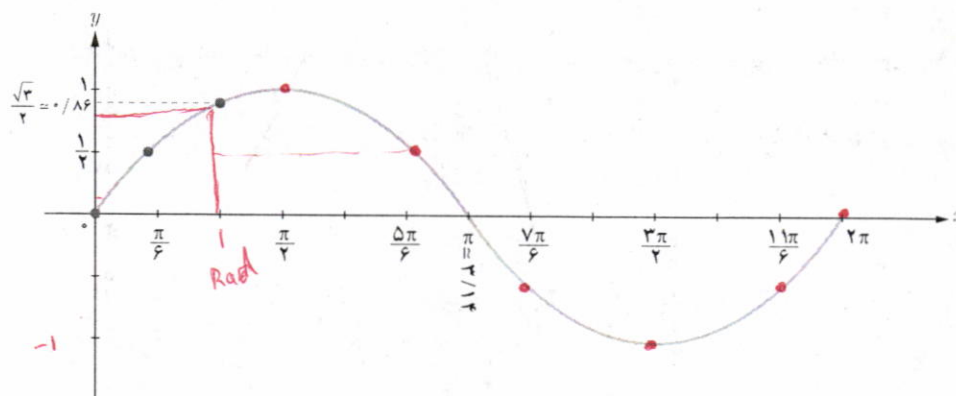
فعالیت

۱ در جدول زیر نسبت سینوس به ازای برخی مقادیر در بازه $[0, 2\pi]$ مشخص شده است. این جدول را تکمیل کنید.

x (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰

۲ جدول بالا به صورت زوج مرتب در زیر داده شده است. با توجه به جدول فوق مجموعه زوج مرتب‌ها را تکمیل و سپس نقاط به دست آمده را در دستگاه مختصات زیر پیدا کنید. آیا نقاط متناظر با زوج‌های مرتب روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند؟ آیا این منحنی تابع است؟ (با رسم خطوط موازی محور y ‌ها بررسی کنید).

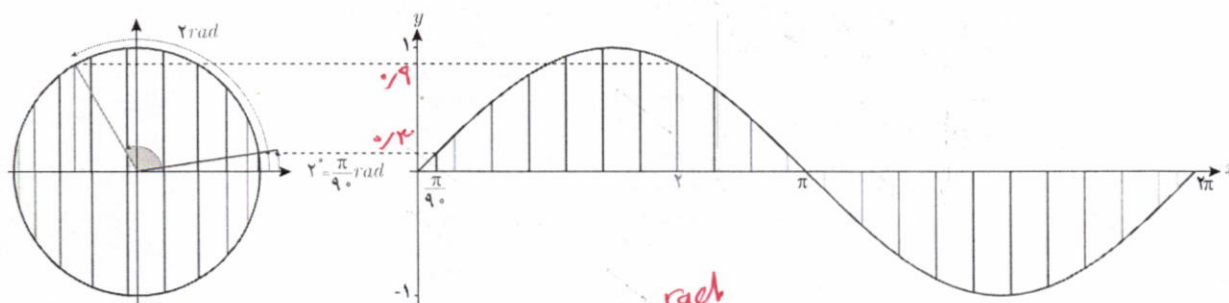
$$f = \left\{ (0, 0), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\pi, 0\right), \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right), (2\pi, 0) \right\}$$



۳ نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ می‌باشد. با توجه به نمودار، مقدار $\sin 1$ کجای محور y ‌ها قرار می‌گیرد؟

$$\sin 1 \approx 0.86$$

۴ در تابع $y = \sin x$ همیشه x را بر حسب رادیان در نظر می‌گیرند مگر آنکه صریحاً گفته شود x بر حسب درجه است یا از نماد $^\circ$ استفاده شود. باتوجه به ارتباط دایره مثلثاتی و نمودار تابع سینوس که در زیر داده شده، تفاوت $\sin 2^\circ$ و $\sin 2$ را بیان کنید.



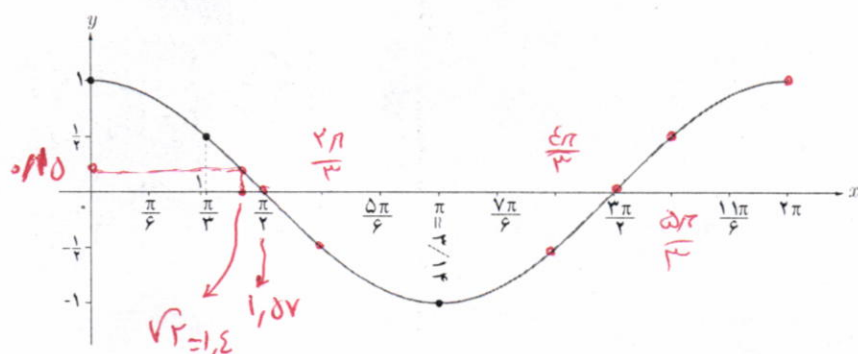
$$\sin(2)_{\text{rad}} = 0.9$$

$$\sin(2^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{90}\right) = 0.03$$

فعالیت

۱ همانند فعالیت قبل، تابع $y = \cos x$ در زیر رسم شده است. مجموعه زوج‌های مرتب داده شده از این تابع را تکمیل کنید و نقاط به دست آمده را مانند نمونه بر روی نمودار نمایش دهید.

$$f = \left\{ (0, 1), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right), (\pi, -1), \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right), (2\pi, 1) \right\}$$



خواندنی

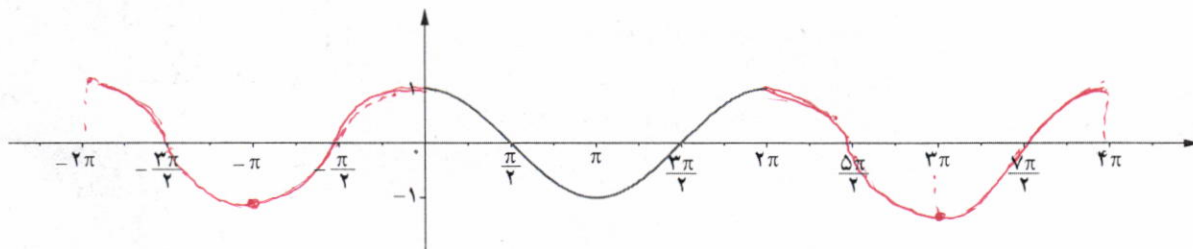
در همه ماشین حساب‌های پیشرفته، برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی می‌توان از دو حالت استفاده کرد که یک حالت بر حسب درجه (DEG) و حالت دیگری بر حسب رادیان (RAD) است. هنگام استفاده از ماشین حساب باید ابتدا آن را در حالت مورد نظر قرار داد. در ماشین حساب زیر آن را در حالت رادیان قرار داده و سپس مقدار $\cos \sqrt{2}$ را حساب کرده‌اند.



۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{2}$ رادیان را بر روی محور x ‌ها بیابید و سپس مکان $\cos \sqrt{2}$ را بر روی محور y ‌ها به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.

$$\cos(\sqrt{2})_{\text{rad}} = \cos(1.4)_{\text{rad}} = 0.1559$$

۲ از درس‌های قبل می‌دانیم که $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ و نیز $\cos(-x) = \cos x$. با استفاده از این روابط مقدار تابع $y = \cos x$ را در دیگر نقاط داده شده بر روی محور x به دست آورید و نمودار تابع را از دو طرف ادامه دهید. آیا نمودار این تابع در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ و $[0, 2\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ با هم متفاوت هستند؟
نکته: مقادیر برای جفت شدن



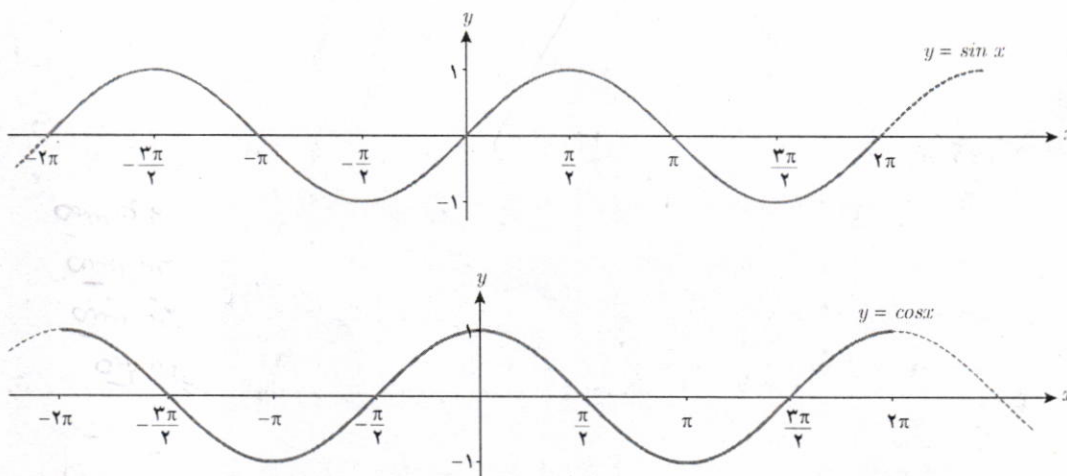
۳ با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 4\pi]$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- الف) آیا می‌توان بر روی محور x ها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = \frac{1}{3}$ باشد؟ بله وجود دارد.
 ب) آیا می‌توان بر روی محور x ها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = 2$ باشد؟ خیر
 پ) بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = \cos x$ در این بازه چقدر است؟
 $y_{\max} = 1$ $y_{\min} = -1$

تابع‌های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را مثلثاتی گویند. دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی و برد آنها بازه $[-1, 1]$ است. گاهی به نمودار تابع $y = \sin x$ موج سینوسی و به نمودار تابع $y = \cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.

همان‌طور که در فعالیت ۲ بررسی شد تابع $y = \cos x$ در بازه‌های به طول 2π تکرار می‌شود. این وضعیت برای تابع $y = \sin x$ نیز برقرار است (چرا؟). با توجه به این ویژگی در توابع مثلثاتی بالا، می‌توان نمودار آنها را به صورت زیر رسم کرد.

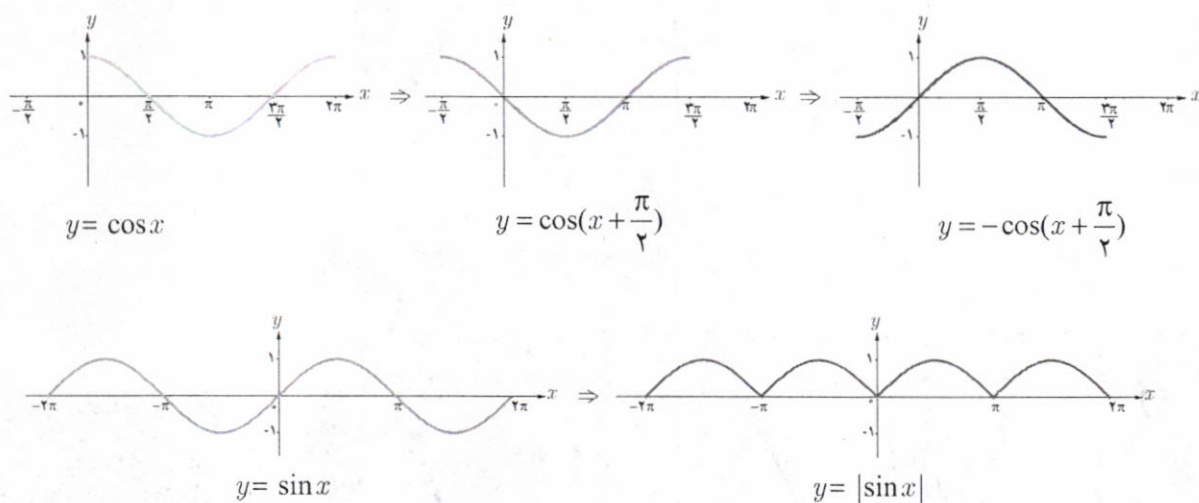
$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$



درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

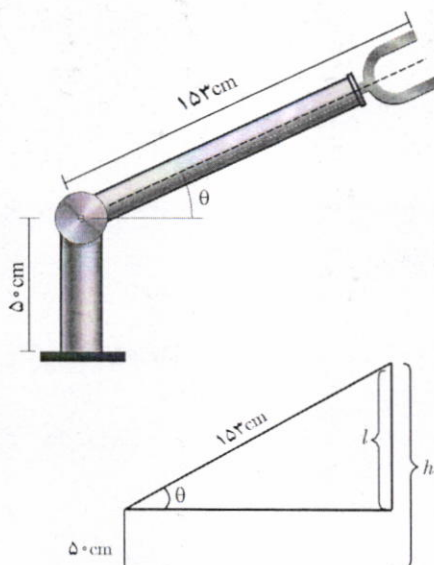
- الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد. **نادرست**
 ب) $\sin \sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است. **درست**
 پ) $\cos 3 = \cos 3^\circ$. **نادرست**
 ت) اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ آنگاه $-1 < \cos x < 0$ است. **نادرست**
 ج) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است. **نادرست**
 ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲- باشد. **نادرست**

♣ مثال: با توجه به نمودار توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، نمودار توابع $y = |\sin x|$ و $y = -\cos(x + \frac{\pi}{4})$ در زیر رسم شده است.



♣ مثال: رویات‌ها در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. در طراحی انواع رویات‌ها از توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. در شکل روبه‌رو یک رویات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می‌کنید. با توجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیره رویات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل‌سازی کنید. $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$

♣ حل: کافی است وضعیت رویات را به صورت زیر ترسیم کنیم. اکنون کل ارتفاع نوک گیره از سطح زمین (h) به صورت زیر به دست می‌آید:



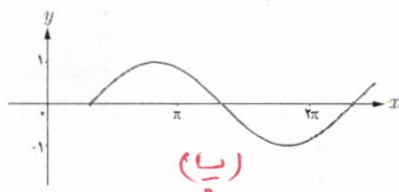
$$\sin \theta = \frac{l}{153} \rightarrow l = 153 \sin \theta$$

sin

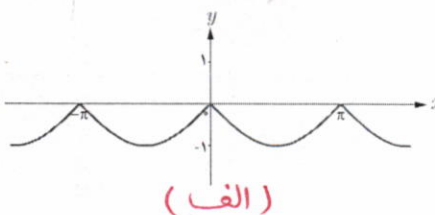
$$\Rightarrow h = 50 + l = 50 + 153 \sin \theta$$

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

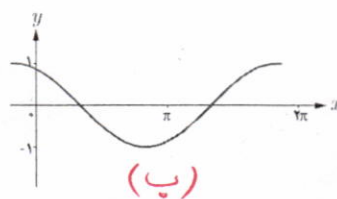
(پ) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$



(ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$

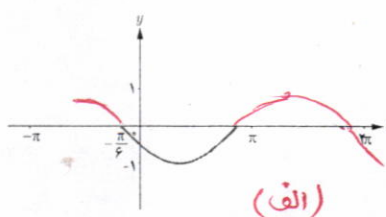


(الف) $y = -|\sin x|$



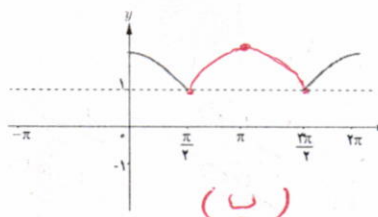
۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

(پ) $y = 1 + |\cos x|$



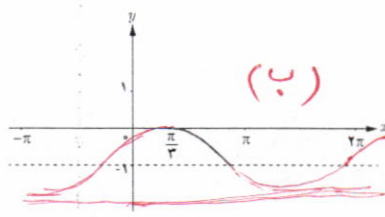
$y_{\max} = 2$
 $y_{\min} = 1$

(ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

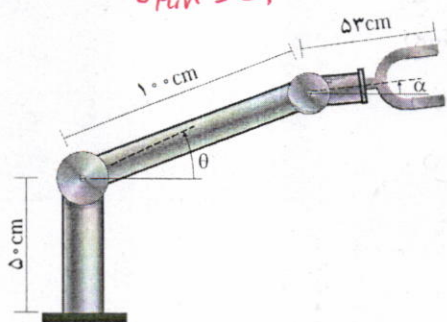


$y_{\max} = 0$
 $y_{\min} = -2$

(الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$



$y_{\max} = 0$
 $y_{\min} = -1$



۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می دهد؟

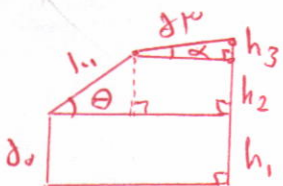
۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازه $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ یک به یک است؟

۵ در طراحی روبات های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه رو در نظر می گیرند.

(الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل سازی کنید. $(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

(ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع ۲۳/۵ cm مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -3^\circ$ قرار داده است.

تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟



$\sin \theta = \frac{h_2}{100} \rightarrow h_2 = 100 \sin \theta$ (الف)

$\sin \alpha = \frac{h_3}{53} \rightarrow h_3 = 53 \sin \alpha$

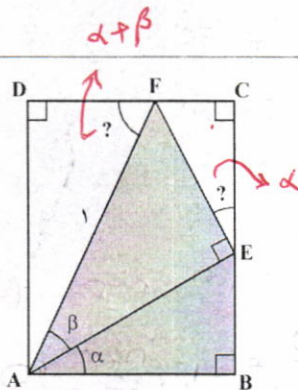
$h = h_1 + h_2 + h_3 = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha$

(ب)
 $23.5 = 50 + 100 \sin \theta + 53(-\frac{1}{20})$
 $\rightarrow 23.5 = 50 + 100 \sin \theta - 2.65 \rightarrow \sin \theta = \frac{8}{100} = \frac{1}{12.5} \rightarrow \theta = 3^\circ$

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

در سال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی مانند $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ و $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$) آشنا شدید. این اتحادها تنها شامل یک زاویه هستند. اکنون در این درس، روابطی را که در آنها دو زاویه مختلف به کار رفته است فرا می گیرید.

فعالیت



۱ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است. الف) با تکمیل روابط زیر اندازه $\hat{FEC}$ و $\hat{AFD}$ را برحسب α و β به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{FEC} + 90^\circ + \hat{AEB} = 180^\circ : \text{زاویه } E \text{ نیم صفحه است.} \\ \alpha + 90^\circ + \hat{AEB} = 180^\circ : \text{مجموع زوایای داخلی } ABE \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{FEC} = \alpha.$$

$\Rightarrow \hat{AFD} = \alpha + \beta$ اضلاع AB و DC باهم موازی و پاره خط AF به صورت مورب آن را قطع کرده است.

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $\triangle ADF$ را با توجه به اینکه $AF = 1$ ، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس $\triangle DFA$ بنویسید.

$$\sin(\alpha + \beta) = AD$$

$$\cos(\alpha + \beta) = DF$$

پ) اضلاع AE و EF از مثلث قائم‌الزاویه AEF را، که وتر آن برابر ۱ است، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه β بنویسید.

$$\sin \beta = EF$$

$$\cos \beta = AE$$

ت) اندازه پاره خط‌های BE ، EC ، FC و AB را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به دست آورید.

$$\triangle ABE: \left(\begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{\cos \beta} \rightarrow BE = \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{\sin \beta} \rightarrow AB = \cos \alpha \sin \beta \end{array} \right.$$

$$\triangle ECF: \left(\begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{FC}{EF} = \frac{FC}{\sin \beta} \rightarrow FC = \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha = \frac{EC}{EF} = \frac{EC}{\sin \beta} \rightarrow EC = \cos \alpha \sin \beta \end{array} \right.$$

ث) از تساوی اضلاع روبه‌رو در مستطیل صفحه قبل روابط زیر به دست می‌آید. آنها را با توجه به قسمت‌های الف تا د کامل کنید.

$$AD = BE + EC \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$DF = AB - FC \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

۱ توضیح دهید چرا اگر اندازه پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است. یا زنی به برقراره کند.

در فعالیت فوق زوایای به کار رفته همگی تند بودند. می‌توان با استفاده از خواص توابع مثلثاتی نشان داد که این روابط برای همه زوایا برقرار است. بنابراین همواره داریم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

همچنین با تبدیل β به $-\beta$ و استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه می‌توان به دست آورد:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

و نیز

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

پس همواره داریم:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

❖ مثال: مقدار $\sin 75^\circ$ در زیر محاسبه شده است.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

❖ مثال: درستی رابطه $\tan(\frac{\pi}{4} + \theta) = -\cot \theta$ را نشان دهید.

$$\tan(\frac{\pi}{4} + \theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \theta)}{\cos(\frac{\pi}{4} + \theta)} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = -\cot \theta$$

$$\sin 10^\circ = \sin(70^\circ + \varepsilon) = \sin 70^\circ \cos \varepsilon + \cos 70^\circ \sin \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 10^\circ = \cos(70^\circ + \varepsilon) = \cos 70^\circ \cos \varepsilon - \sin 70^\circ \sin \varepsilon$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\tan 10^\circ = \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

تمرین

۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \cos 15^\circ = \cos(70^\circ - \varepsilon) = \cos 70^\circ \cos \varepsilon + \sin 70^\circ \sin \varepsilon$$

$$۲) \tan 15^\circ = \text{حد}$$

$$۳) \sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

۲ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به

سؤالات زیر پاسخ دهید.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

الف مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$$

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می گیرد؟

۳ با استفاده از روابط نسبت های مجموع دو زاویه نشان دهید که:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha)$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha)$$

$$= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5} \times \left(\frac{5}{13}\right) = \frac{-36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{-16}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{4}{5} \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5} \left(\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{-48}{65} + \frac{10}{65} = \frac{-38}{65} \end{aligned}$$